LOGICĂ MATEMATICĂ. MULȚIMI
Probleme pregătitoare pentru lucrarea de control

1) Alcătuiți tabelele de adevăr ale expresiilor logice:
a) $(p \to q) \vee [p \to (q \wedge p)]$.
b) $p \wedge (q \vee \rceil p) \wedge (\rceil q \to p) \vee q$.
c) $[(p \to r) \vee q] \leftrightarrow \rceil p$.
2) Arătați că următoarele expresii logice sunt tautologii:
a) $(\rceil(\mathrm{p} \to \rceil(\mathrm{q} \wedge \mathrm{p}))) \to (\mathrm{p} \vee q)$.
b) $[p \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$.
3) a) Negați propozițiile:
(p_1): $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 7 = 3$.
(p_2): $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 0$.
(p_3): $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x + y = 3 \wedge 2x - y = 4$.
(p_4): $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 5 \to x > 2$.
b) Dacă A, B, C sunt mulțimi, caracterizați cu ajutorul cuantificatorilor și conectorilor logici relația A $\subset (B \setminus C)$ și apoi negați propoziția respectivă.
4) Se consideră predicatul
p(x): $x^2 - 3x > 1$, $x \in \mathbb{R}$
a) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor p(-1), p($\sqrt{2}$), p$\left(\frac{1}{2}\right)$, p(2005).
b) Transformați în propoziție predicatul p(x) prin cuantificarea variabilei.
c) Negați propozițiile de la subpunctul b).
5) Se consideră mulțimea $D \subset \mathbb{R}$ și predicatele
$p_1(x)$: $x - 5 = 0$, $x \in D$.
$p_2(x)$: $x^2 - 25 = 0$, $x \in D$.
a) Dacă D = $\mathbb{R}$ arătați că $p_1(x) \Rightarrow p_2(x)$ și $p_2(x) \not\Rightarrow p_1(x)$.
b) Dacă D = $\mathbb{N}$ arătați că $p_1(x) \Leftrightarrow p_2(x)$.
6) Completați în enunțurile de mai jos cu „este necesar și nu este suficient”, „este suficient și nu este necesar” sau „este necesar și suficient” astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
(p_1) Pentru ca un număr întreg să se dividă cu 3 este ... să se dividă cu 9.
(p_2) Pentru ca un număr natural să fie pătrat perfect este ... să aibă ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.
(p_3) Pentru ca două numere să fie negative este ... ca produsul lor să fie pozitiv.
(p_4) Pentru ca două numere să fie negative este ... ca produsul lor să fie pozitiv și suma lor să fie negativă.
(p_5) Pentru ca un paralelogram să fie romb este ... să aibă diagonalele perpendiculare.
(p_6) Pentru ca un patrulater să fie dreptunghi este ... să aibă diagonalele congruente.
7) Determinați mulțimile:
$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| 2x^2 - x - 1 = 0\right\}$
$B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \, |x - 2| + 1 = 0\right\}$
$C = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \, x^2 - 2|x| + 3 = 0\right\}$
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \, |x - 1| < 2\right\}$
$E = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| mx^2 - (m^2 + 1)x + m = 0\right\}$, $m \in \mathbb{Z}$.
8) Determinați $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ în fiecare din cazurile:
a) $A = [2; 5]$, $B = (3; \infty)$.
b) A = [-1; 2), $B = (a; 5]$, $a \in \mathbb{R}$.

9) Dacă A = {3; 4,5} și B = {-1; 2} determinați mulțimile A x B și $\mathscr{P}$(A).

10) Determinați $m \in \mathbb{R}$ în fiecare din următoarele cazuri:

a) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x + 2 = 0\} \neq \emptyset$;

b) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + mx - 1 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \emptyset$;

c) $\{x \in \mathbb{R} | mx^2 + x + 1 = 0\} = \emptyset$;

d) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + mx - 1 = 0\} \setminus \left\{-2; \frac{1}{2}\right\} = \emptyset$.

11) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ în fiecare din următoarele cazuri:

a) $\{1;3\} \subset \{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + b = 0\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + b = 0\} \subset \{1;3\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + b = 0\} = \left\{\frac{1}{2}; -2\right\}$.

12) Determinați mulțimile:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{n+3}{n-2}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}\right\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| x = \frac{n+7}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \sqrt{7-x} \in \mathbb{R}\right\}$$

$$D = \left\{y \in \mathbb{R} \middle| y = \frac{x+2}{x^2+1}, x \in \mathbb{N}\right\}$$

13) Demonstrați că, dacă mulțimile A, B, C $\subset$ E, atunci:

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \cap C_E C)$

c) $B \subset A \Leftrightarrow B \cap C_E A = \emptyset$

d) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \setminus C_E B = \emptyset$

e) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$

f) $A \cup C = B \cup C \wedge A \cap C = B \cap C \Leftrightarrow A = B$

g) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

14) Se consideră mulțimile

$A_m = \{x \in \mathbb{R} | mx^2 + (4m+1)x + 3m + 1 = 0\}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $A_m \neq \emptyset$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

b) Pentru ce valori ale lui m mulțimea A_m are un singur element?

c) Pentru ce valori $m \in \mathbb{Z}$ mulțimea $A_m \cap \mathbb{Z}$ are două elemente?

d) Pentru ce valori $m \in \mathbb{R}$ mulțimea $A_m \cap \mathbb{Z}$ are două elemente?

prof. Gabriela Oprea