ȘIRURI FUNDAMENTALE

<u>Definiție</u>. Șirul $(a_n) \subset \mathbb{R}$ se numește fundamental dacă
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathrm{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|a_n - a_m| < \varepsilon$, $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $m,n > \mathrm{N}_\varepsilon$.

<u>Propoziție</u>. Șirul $(a_n) \subset \mathbb{R}$ este fundamental dacă și numai dacă
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathrm{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq \mathrm{N}_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

<u>Teorema lui Cauchy</u>. Șirul (a_n) este convergent dacă și numai dacă este fundamental.
Pentru demonstrația propoziției și teoremei de mai sus, vezi [3].

<u>Aplicații</u>.
1) Arătați că șirurile cu termenul general
$a_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{3^n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ sunt convergente.

<u>Soluție</u>. $|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} \left|\frac{\cos(n+k)x}{3^{n+k}}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{3^{n+k}} =$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{\frac{2}{3}} < \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

Deoarece $\lim \frac{1}{2 \cdot 3^n} = 0$ rezultă că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathrm{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\frac{1}{2 \cdot 3^n} < \varepsilon$, $\forall n \geq \mathrm{N}_\varepsilon$, deci
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathrm{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq \mathrm{N}_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

$$|b_{n+p} - b_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

2) Demonstrați că șirurile cu termenul general
$a_n = \frac{10}{1} + \frac{11}{3} + \ldots + \frac{10+n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,
$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și
$c_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$ sunt divergente.

<u>Soluție</u>.

$$a_{2n} - a_n = \frac{10+n+1}{2n+3} + \ldots + \frac{10+2n}{4n+1} > \frac{10+2n}{4n+1} > \frac{1}{2}$$

$$b_{2n} - b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termeni}} = \frac{1}{2}$$

Presupunem că șirul (c_n) are limita *l*. Deoarece șirul (c_n) este mărginit deducem $l \in \mathbb{R}$ și $\lim(\sin(n+1) - \sin(n-1)) = 0$. Dar $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin 1 \cos n$. Deducem

$\lim(\cos n) = 0$ și deoarece $\sin 2n = 2\sin n \cos n$, rezultă $\lim(\sin 2n) = 0$. Șirul $(\sin 2n)$ este subșir al șirului (c_n), deci $\lim c_n = 0$. Prin trecere la limită în egalitatea $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ se obține o contradicție.

BIBLIOGRAFIE

1) Aramă L. și Morozan T. – Probleme de calcul diferențial și integral, Editura Tehnică, 1978.
2) Petrică L., Lazăr I. - Probleme de analiză matematică pentru liceu, volumul I, Editura Petrion 1993.
3) Colectiv – Matematică pentru grupele de performanță, clasa a XI-a, Editura Dacia, 2004.

prof. Gabriela Oprea