CALCULUL RANGULUI UNEI MATRICE PRIN TRANSFORMĂRI ELEMENTARE

Majoritatea manualelor de matematică pentru clasa a XI-a prezintă la tema „Rangul unei matrice” metoda de calcul a lui Kronecker care constă în calculul unor minori. Deoarece volumul de calcule uneori este destul de mare, vă prezint în continuare un alt procedeu pe care puteți să-l folosiți în determinarea rangului unei matrice.

Definiție. Se numește transformare elementară a unei matrice, oricare din următoarele transformări:

1) schimbarea a două linii (coloane) între ele;
2) înmulțirea elementelor unei linii (coloane) cu un număr nenul;
3) adunarea la elementele unei linii (coloane) a elementelor altei linii (coloane) înmulțite cu același număr.

Propoziție. Transformările elementare nu schimbă rangul unei matrice.

Demonstrație. Se folosesc definiția rangului și proprietățile determinanților.

Definiție. Matricele A și B de același tip se numesc echivalente dacă una din ele se obține din cealaltă printr-un număr finit de transformări elementare. Se notează A~B.

Observație. Două matrice echivalente au același rang.

Definiție. Matricea $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are forma economică diagonală dacă $a_{11}=a_{22}=...=a_{rr}=1$, $r\in\mathbb{N}^*$, $r\le\min(m,n)$ și $a_{ij}=0$ în rest, adică

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Observații. 1) Dacă o matrice nenulă are forma canonică diagonală de mai sus, atunci elementele care sunt la intersecția primelor *r* linii și *r* coloane formează matricea unitate de ordin *r*.

2) Forma canonică diagonală are avantajul că pe ea „citim” ușor că rangul matricei este *r*.

Teoremă. Orice matrice nenulă poate fi adusă la forma canonică diagonală prin transformări elementare.

Demonstrație. Cel puțin un element al matricei A este nenul. Prin schimbări de linii sau coloane îl aducem pe linia 1 și coloana 1, apoi împărțim linia 1 cu elementul respectiv și obținem

$$\mathrm{A}\sim\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & ... & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & ... & a'_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a'_{m1} & a'_{m2} & a'_{m3} & ... & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Coloana 1 o înmulțim cu $(-a'_{12})$ și o adunăm la coloana 2; coloana 1 o înmulțim cu $(-a'_{13})$ și o adunăm la coloana 3 etc. În felul acesta obținem o matrice echivalentă cu A care are toate elementele de pe linia 1 nule cu excepția primului. Procedând analog cu liniile formăm zerouri și pe coloana 1 (cu excepția primului element) și obținem

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \dots & a''_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a''_{m2} & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

Dacă $a''_{ij} = 0$, $\forall i = \overline{2,m}$, $\forall j = \overline{2,n}$, atunci rangul matricei este 1. În caz contrar, există $a''_{ij} \neq 0$, $i = \overline{2,m}$, $j = \overline{2,n}$. Procedând ca mai înainte facem (prin transformări echivalente) ca elementul de pe linia 2 și coloana 2 să fie egal cu 1, apoi anulăm celelalte elemente de pe linia 2 și coloana 2 etc. După un număr finit de pași se ajunge la forma canonică diagonală.

Aplicații

1) Calculați rangul matricei $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -9 & 7 \\ 9 & 3 & 0 & 3 \\ -7 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție. Împărțim linia 2 cu 3.

$A \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -7 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Schimbăm liniile 1 și 3 între ele.

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -7 & -2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$. Formăm zerouri pe linia 1.

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & -2 \\ -7 & 5 & -15 & 10 \\ -3 & 5 & -15 & 10 \end{pmatrix}$. Formăm zerouri pe coloana 1.

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 5 & -15 & 10 \\ 0 & 5 & -15 & 10 \end{pmatrix}$. Împărțim linia 2 cu (-2), adunăm linia 3 la linia 4, apoi impărțim linia 3 cu 5.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Formăm zerouri pe linia 2.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Formăm zerouri pe coloana 2.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Schimbăm coloanele 2 și 3 între ele.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. rang A = 3.

<u>Observație</u>. Dacă la un moment dat toate elementele de pe o linie cu excepția unuia sunt nule, atunci automat putem să înlocuim cu 0 toate celelalte elemente de pe coloana în care se află acel element nenul.

2) Calculați rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Soluție</u>.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 5 & -10 \\ 2 & -3 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & -3 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. rang A = 2.

3) Calculați rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & a & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Soluție.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & a & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & a-6 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ 3 & -10 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-6 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-6 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dacă $a = 1$, atunci rang A = 2.
Dacă $a \neq 1$, atunci rang A = 3.

4) Determinați rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -5 \\ \beta & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Suluție.

$$A \sim \begin{pmatrix} 5 & \alpha & 2 \\ 1 & 3 & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & \beta \\ 5 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & \alpha-15 & 2-\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-15 & 2-\beta \end{pmatrix}$$

Dacă $\alpha = 15$ și $\beta = 2$, atunci rang $A = 1$.
Dacă $\alpha \neq 15$ sau $\beta \neq 2$, atunci rang $A = 2$.
Vă propun spre rezolvare exercițiul:
Determinați rangul matricelor:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 5a \\ -3 & 2 & b & 1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Răspuns. a) 2; b) 3; c) Dacă a = 0 și b = -5, atunci rang A = 2; dacă $a \neq 0$ sau $b \neq -5$, atunci rang A = 3.

BIBLIOGRAFIE

1) Petrică I., Lazăr I. – Probleme de algebră pentru liceu, volumul III, Editura Petrion, 1993.
2) Colectiv – Matematică pentru grupele de performanță, clasa a XI-a, Editura Dacia 2004.

prof. Gabriela Oprea