PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU TEZA DE PE SEMESTRUL AL II-LEA

1. Să se calculeze derivatele laterale ale funcțiilor următoare în punctele indicate:
   a. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{|x-1|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x_0 = 1, x_0 = 0;$
   b. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \ln(x^2 - 2x + 2), & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1.$
2. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + b, & x \leq 0 \\ 2ax + 1, & x > 0 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.
3. Să se determine punctele unghiulare, punctele de întoarcere și punctele cu tangentă verticală pentru funcțiile:
   a. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2};$
   b. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x+1|}{x^2+1}.$
4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă tangenta la graficul funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \to \mathbb{R}$,
   $f(x) = \frac{m}{x^2-1}$ în punctul 2 este paralelă cu dreapta de ecuație $4x + 9y - 5 = 0$.
5. Să se arate că funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x(1 - \ln x)$ verifică egalitatea $x^2(f'')'(x) - 1 = 0, \forall x \in (0, \infty)$.
6. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = 2^{-x} + 5^{-x}$ este inversabilă și să se calculeze derivata inversei în punctul 2.
7. Să se determine $a > 0$ astfel încât $2^x + a^x \geq 3^x + 4^x, \forall x \in \mathbb{R}$.
8. Se consideră funcția $f: [-1;\ a] \to \mathbb{R}, f(x) = |3x - 2| - 5, a \in (-1;\ \infty)$. Să se determine *a* dacă funcției f i se poate aplica teorema lui Rolle.
9. Să se aplice teorema lui Lagrange funcției $f: [-3;\ -1] \to \mathbb{R}$,
   $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 9, x \in [-3; -2] \\ x^3 + 3x^2 + 1, x \in (-2; -1] \end{cases}.$
10. Să se demonsteze că $(b - a) \operatorname{tg} a < \ln \frac{\cos a}{\cos b} < (b - a) \operatorname{tg} b, \forall a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $a < b$.

prof. Gabriela Oprea