

UNDE ESTE GREȘEALA? (L1)

Pe mulțimea $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ se consideră legea de compoziție $*$ definită astfel:

$$x * y = xy + i(x + y) - 1 - i, \quad \forall x, y \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}.$$

Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea $*$.

„Soluție”: Elementul neutru al legii $*$ este $1 - i$. Legea $*$ este comutativă.

$x \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ a.î. $x * x' = 1 - i \Leftrightarrow \exists x' \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ a.î. $x'(x + i) = 2 - ix$.

Deoarece $x \neq -i$, $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ se obține $x' = \frac{2 - ix}{x + i}$. Amplificând fracția cu $x - i$ se obține

$$x' = \frac{(2 - ix)(x - i)}{x^2 + 1} = \frac{x - ix^2 - 2i}{x^2 + 1}.$$

$$x' \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} \Leftrightarrow x' \neq -i \Leftrightarrow x - ix^2 - 2i \neq -ix^2 - i \Leftrightarrow x \neq i.$$

Concluzia este că toate elementele din $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ sunt simetrizabile.

Pe de altă parte $i * \left(-\frac{3i}{2}\right) = 1 - i$ de unde rezultă că elementul i este simetrizabil.

UNDE ESTE GREȘEALA?

prof. Gabriela Oprea